XX Olimpíada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Duración: 4 horas

Cada problema vale 7 puntos Marzo 2008

Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de APMO.
Por favor, no publicar ni discutir los problemas en Internet hasta esa fecha.
No se puede usar calculadora.

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $\angle A < 60^\circ$. Sean X e Y los puntos de los lados AB y AC, respectivamente, tales que $CA + AX = CB + BX$ y $BA + AY = BC + CY$. Sea P el punto del plano tal que las rectas PX y PY son perpendiculares a AB y AC, respectivamente. Demostrar que $\angle BPC < 120^\circ$.

Problema 2. Los alumnos de una división formaron grupos de exactamente tres integrantes y tales que dos grupos distintos tienen a lo más un integrante en común. Demostrar que si la división es de 46 alumnos entonces hay un conjunto de 10 alumnos entre los cuales no están los tres integrantes de un mismo grupo (puede haber uno o dos).

Problema 3. Sea Γ la circunferencia circunscrita de un triángulo ABC. Una circunferencia que pasa por A y C corta a los lados BC y BA en D y E, respectivamente. Las rectas AD y CE cortan nuevamente a Γ en G y H, respectivamente. Las rectas tangentes Γ en A y C cortan a la recta DE en L y M, respectivamente. Demostrar que las rectas LH y MG se cortan en un punto de Γ.

Problema 4. Consideramos la función $f : \infty_0 \to \infty_0$, donde ∞_0 es el conjunto de los enteros no negativos, definida por las siguientes condiciones:
(i) $f(0) = 0$, (ii) $f(2n) = 2f(n)$ y (iii) $f(2n+1) = n + 2f(n)$ para todo $n \geq 0$.
a) Determinar los tres conjuntos
$L = \{n : f(n) < f(n+1)\}$, $E = \{n : f(n) = f(n+1)\}$ y $G = \{n : f(n) > f(n+1)\}$.
b) Para cada $k \geq 0$, hallar una fórmula para $a_k = \max\{f(n) : 0 \leq n \leq 2^k\}$ en términos de k.

Problema 5. Sean a, b, c enteros que satisfacen $0 < a < c - 1$ y $1 < b < c$. Para cada k, $0 \leq k \leq a$, sea r_k, $0 \leq r_k < c$, el resto de dividir kb por c. Demostrar que los dos conjuntos $\{r_0, r_1, r_2, ..., r_a\}$ y $\{0, 1, 2, ..., a\}$ son distintos.